Análisis de medidas experimentales

María del Mar Sánchez, Ignacio Moreno

Grupo TecnOPTO. Universidad Miguel Hernández

http://tecnopto.edu.umh.es

1. Introducción

Existen diferentes criterios para la asignación de errores a las medidas experimentales. Aquí presentamos un criterio simplificado útil en la mayoría de situaciones.

El resultado de un experimento debe contemplar los siguientes aspectos:

1. Medir una magnitud física es compararla con un valor concreto de dicha magnitud tomado arbitrariamente como modelo de comparación, que es la **unidad**.
2. Además del valor numérico de la medida física, el resultado de un experimento se debe acompañar de otro valor numérico expresado en las mismas unidades que indica la precisión de la medida, y que se conoce como **intervalo de error**.
3. Finalmente, el resultado de toda medida no es tan sólo un valor numérico, sino que siempre debe estar acompañado de su **unidad** correspondiente.

Por lo tanto, si x denota el resultado de un experimento, y δx su error, la expresión correcta del resultado medido debe ser en la forma siguiente

$$x \pm \delta x \ \text{(unidades)}. \tag{1}$$

En todos los casos, debe indicarse las unidades de la medida, que deben ser las mismas para el resultado y para su error. La única excepción son las llamadas **magnitudes adimensionales** que se obtienen por un cociente entre dos magnitudes con las mismas dimensiones (por ejemplo, el índice de refracción de un material). Son magnitudes sin dimensiones, y por lo tanto no tienen unidades.

Cuando los valores sean muy grandes o muy pequeños, debe emplearse la **notación científica**. Se emplean los siguientes prefijos en las unidades:

Factor	10^{18}	10^{15}	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	10^{2}	10^{1}
Prefijo	Exa	Peta	Tera	Giga	Mega	Kilo	Hecta	Deca
Símbolo	E	P	T	G	M	K	h	D
Factor	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}
Prefijo	Deci	Centi	Mili	Micro	Nano	Pico	Femto	Atto
Símbolo	d	c	m	μ	n	p	f	A

Tabla 1. Prefijos de los múltiplos y submúltiplos de 10.

La expresión (1) indica que el valor verdadero de la magnitud se encuentra dentro del intervalo entre $x-\delta x$ y $x+\delta x$. La cantidad δx recibe el nombre de **error absoluto** de la medida. El error puede expresarse también en porcentaje, como el **error relativo** δ_r definido como

$$\delta_r = \frac{\delta x}{x} \times 100. \qquad (3)$$

2. Medidas directas o por aparatos calibrados

De forma genérica, una medida directa puede tener errores por tres motivos:

- **Errores sistemáticos**: se producen por una causa conocida y debe evitarse introduciendo la corrección oportuna (por ejemplo, el error de cero). Si no fuera posible evitarlos, las medidas deben corregirse teniendo en cuenta este error sistemático.
- **Errores de sensibilidad:** son debidos a la limitación en la precisión de cualquier aparato de medida.
- **Errores aleatorios:** se producen por causas desconocidas, por imprecisiones en el método de medida o porque la magnitud que se mide es intrínsecamente aleatoria.

Una vez eliminados o corregidos los errores sistemáticos, el error experimental δx asignado a la variable está determinado por el error de sensibilidad del aparato y el error aleatorio del experimento.

3.1. Error de sensibilidad

El **error de sensibilidad o de escala** δ_s es el que se deriva de la limitación en la escala mínima de los aparatos de medición. Cada medida individual está sujeta a este error. Se debe distinguir entre la medición con aparatos analógicos y digitales.

Cuando se efectúa la medición sobre una escala graduada de un aparato **analógico**, a menudo la indicación obtenida no se corresponde con una división exacta de la escala, sino que queda comprendida entre dos valores (por ejemplo, medidas hechas con una regla). En estos casos puede hacerse la estimación de forma visual y se puede apreciar hasta la mitad de la división de escala. Por tanto, el error de sensibilidad δ_s asignado a la medida es la **mitad de la mínima división** del aparato de medida.

Por el contrario, cuando el aparato de medida es **digital**, la apreciación mínima que puede tomarse corresponde a la última cifra que indica el aparato. En estos casos, el error de sensibilidad δ_s que se debe asignar a la magnitud es igual a la **mínima división** del aparato.

3.2. Error aleatorio: desviación típica

El error aleatorio δ_a proviene del hecho de que, al repetir un experimento, los resultados pueden diferir. Para este tipo de errores, la estimación se hace mediante la **desviación típica** de los datos.

Supongamos que se realizan N medidas sucesivas x_1, x_2 ..., x_N de una magnitud. Asumiendo que la distribución de los datos es normal, el valor más probable de la magnitud es el valor medio de los valores. Esto es, el valor $\bar{x}$ que se asigna a la magnitud es:

$$x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \ . \qquad (4)$$

© María del Mar Sánchez, Ignacio Moreno
http://tecnopto.edu.umh.es

El error aleatorio δ_a asociado a esta medida es la **desviación típica** de los datos (o error cuadrático medio), que viene dado por la expresión

$$\delta_a \equiv \sigma_N = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x - x_i\right)^2} \ . \tag{5}$$

Esta cantidad es una medida de la repetibilidad de los datos ya que, cuanto mayor es la desviación típica de los valores menor es el grado de coincidencia, y por tanto mayor es el error[1].

3.3. Dispersión de medidas

El número de medidas necesario de una magnitud para que el experimento pueda considerarse preciso depende de la repetibilidad de los valores obtenidos. Como criterio para determinar el número de medidas a realizar en un experimento consideramos el siguiente:

- Se toman tres medidas x_1, x_2, x_3 de la magnitud y se calcula su valor medio $\bar{x}$ y la **dispersión** D de los valores, definida como la diferencia entre los valores extremos, es decir, $D = x_{\max} - x_{\min}$.
- Se calcula la **dispersión relativa** de los valores, $d = \left(D/\bar{x}\right) \times 100$.
- Si d es menor al 2% es suficiente con las tres medidas realizadas.
- Si d está entre el 2% y el 8% se hacen seis medidas.
- Si d está entre el 8% y el 15% se hacen quince medidas.
- Si d es superior al 15% se hacen treinta medidas.

3.4. Cifras significativas y redondeos

Al presentar numéricamente un resultado se debe tener en cuenta el concepto de **cifra significativa**. El número de cifras significativas de un resultado se obtiene contando desde la derecha el número de cifras de la cantidad hasta que encontremos un último número no cero, a partir del cual todos los números a la izquierda son ceros. Por ejemplo, el número 0,023 tiene 2 cifras significativas. Si hubiésemos expresado el resultado como 0,0230, éste tendría 3 cifras significativas, y querría decir que el aparato de medida es capaz de medir hasta la cuarta cifra decimal.

Cuando se da el valor de una medida experimental, el criterio que tomamos es que **el error se expresa con una sola cifra significativa**. El valor siempre debe redondearse por exceso o por defecto según sea el valor más cercano. Así, un error obtenido de 0,47 debe expresarse como 0,5. Un error de 27 debe expresarse como 30.

El criterio para el resultado es asignar cifras significativas hasta el decimal que corresponde a la cifra del error. Por ejemplo, un resultado que sea 2,1 con un error 0,002 debe expresarse como 2,100±0,002. También se realiza el redondeo del resultado en función de cual es el valor más cercano. Por ejemplo, un resultado 4,256 con un error 0,1 debe expresarse como 4,3±0,1. En cambio, si el valor hubiese sido 4,226 se debería expresar como 4,2±0,1.

[1] Algunos autores consideran *N*-1 en lugar de *N* en el denominador de la ecuación (5), especialmente cuando se trata de un número pequeño de datos.

© María del Mar Sánchez, Ignacio Moreno
http://tecnopto.edu.umh.es

3.5. Expresión de errores

Cuando se realiza una medida experimental directa se deben comparar las dos fuentes de error, el error de sensibilidad o escala δ_s y el error aleatorio δ_a. La forma de presentar el resultado de la medida directa consiste en dar el valor medio $\bar{x}$ de las medidas realizadas y asignar a dicha medida un error δx igual al mayor de los dos errores, esto es $\delta x=\max(\delta_s,\delta_a)$.

> **<u>Ejemplo</u>**: Consideremos que se hace una medida de tiempo con un cronómetro digital que aprecia hasta las centésima de segundo. Se hacen tres medidas y el resultado es el siguiente:
>
> $$t_1 = 25{,}04 \pm 0{,}01\, s,$$
> $$t_2 = 24{,}98 \pm 0{,}01\, s,$$
> $$t_3 = 25{,}12 \pm 0{,}01\, s.$$
>
> El valor medio de los valores es $\bar{t} = 25{,}0466$ y su dispersión relativa es d=0.55%. Como d<2% no es necesario tomar más medidas. El error de escala de cada medida es δ_s=0.01 s. El cálculo del error aleatorio da como resultado δ_a=0,0702 s. Por tanto, el mayor factor de error es el aleatorio. Aplicando el criterio de una cifra significativa, el resultado de la medida directa debe expresarse como
>
> $$\bar{t} = 25{,}05 \pm 0{,}07\, s\,.$$
>
> El error relativo es $\delta_r = 0{,}3\%$.

4. Medidas indirectas: propagación de errores

Las **medidas indirectas** son aquellas que se obtienen como resultado de aplicar una fórmula teórica sobre valores que son el resultado de medidas directas.

Dada una cantidad y que es función de m variables x_1, x_2, …, x_m, cada una con un error asociado δx_1, δx_2, ..., δx_m, el cálculo del error δy asociado al resultado de una ecuación $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ se obtiene por cálculo de propagación de errores. Tomamos como criterio de error la propagación de errores absolutos. Se obtiene diferenciando la función f y asemejando los diferenciales a los errores, obteniéndose que

$$\delta y = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \delta x_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \delta x_2 + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_m}\right| \delta x_m\,. \tag{6}$$

Algunos autores consideran como criterio de error la propagación de errores cuadráticos, según el cual el error δy viene dado por la relación

$$\delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\delta x_m\right)^2}\,, \tag{7}$$

que suele dar un valor semejante al del criterio absoluto.

> **<u>Ejemplo</u>:** se calcula la velocidad v de un cuerpo a partir de las medidas directas del espacio recorrido L y del tiempo t empleado en recorrerlo, utilizando la relación $v=L/t$. Suponemos que los valores obtenidos son

© María del Mar Sánchez, Ignacio Moreno
http://tecnopto.edu.umh.es

$$\bar{L} = 10{,}51 \pm 0{,}05\, m,$$
$$\bar{t} = 20{,}54 \pm 0{,}08\, s.$$

El valor de la velocidad es v=0,5117 *m/s*, donde se utilizan los valores medios $\bar{L}$ y $\bar{t}$. El error δv que se debe asignar a la velocidad es

$$\delta v = \left|\frac{1}{t}\right|\delta L + \left|\frac{L}{t^2}\right|\delta t = 0{,}00443 \quad m/s,$$

donde nuevamente se usan los valores de $\bar{L}$ y $\bar{t}$ para evaluar la expresión. Por lo tanto, aplicando el criterio de una cifra significativa en el error, la velocidad debe expresarse como

$$v = 0{,}512 \pm 0{,}004\, m/s\,.$$

Algunos ejemplos de propagación de errores en funciones sencillas son:

- **Suma** o **resta**: $y = x_1 \pm x_2 \Rightarrow \delta y = \delta x_1 + \delta x_2$
- **Producto**: $y = x_1 x_2 \Rightarrow \delta y = |x_2|\delta x_1 + |x_1|\delta x_2 \Rightarrow \dfrac{\delta y}{|y|} = \dfrac{\delta x_1}{|x_1|} + \dfrac{\delta x_2}{|x_2|}$
- **Cociente**: $y = \dfrac{x_1}{x_2} \Rightarrow \delta y = \dfrac{\delta x_1}{|x_2|} + \dfrac{|x_1|\delta x_2}{x_2^2} \Rightarrow \dfrac{\delta y}{|y|} = \dfrac{\delta x_1}{|x_1|} + \dfrac{\delta x_2}{|x_2|}$

5. Consideraciones para la reducción de errores

Algunas consideraciones que ayudan a reducir los errores experimentales son:

1. Hacer todas las medidas en el intervalo de tiempo más corto posible, para evitar que alguna variable que debe permanecer constante pueda cambiar.
2. Corregir o tener en cuenta el error de cero de los aparatos de medida, a fin de evitar errores sistemáticos.
3. Evitar el **error de paralaje** que se produce cuando el objeto que se quiere medir se encuentra a cierta distancia de la escala, con lo que la línea de mirada varía el resultado, aumentando el error. Este tipo de error es común en aparatos en los que una aguja se mueve sobre una escala. La forma de evitarlo es procurar que la separación entre la aguja y la escala sea mínima.
4. En la medida de funciones periódicas, en lugar de medir un solo periodo, hacer la medida sobre *N* periodos, con objeto de reducir el error absoluto de la medida. Se calcula la medida en un solo periodo como una medida indirecta.

6. Representación gráfica

La presentación de los resultados en forma de gráficas tiene gran utilidad ya permite obtener una **visualización** de la evolución de un experimento en función de una variable. Además se utiliza para determinar el valor de una magnitud, por lo general la pendiente de una recta, que representa la relación entre dos variables.

6.1. Gráficas y tablas

© María del Mar Sánchez, Ignacio Moreno
http://tecnopto.edu.umh.es

Nos restringimos a gráficas del tipo $y=f(x)$. Se utilizan para representar un experimento físico en el que se varía de manera controlada una variable x (que se representa en el eje de abcisas), y se mide su incidencia en otra variable relacionada y (que se representa en el eje de ordenadas).

Los ejes coordenados deben tener **títulos** que indiquen de qué **magnitud** se trata, y en qué **unidades** se expresa. Las escalas de ambos ejes deben abarcar todo el intervalo de medidas realizadas, y solamente éste, aunque para ello el origen de coordenadas no coincida con el valor cero. Es conveniente que en el fondo de la gráfica se presente una rejilla asociada a valores enteros de la escala de los ejes, para poder apreciar los valores de los puntos experimentales.

Los datos se presentan en forma de puntos. Estos puntos tienen que estar acompañados de **barras de error**, tanto verticales como horizontales que indiquen la imprecisión en las variables x e y. Si se presentan varias curvas en una misma gráfica, es conveniente introducir una **leyenda** asignando la característica de cada una de las curvas.

6.2. Ajuste por mínimos cuadrados

En muchas ocasiones la relación funcional entre las variables x e y es mediante una recta $y=Ax+B$, donde A y B son dos constantes que pueden tener interés físico. Conviene poder evaluar su valor y su error a partir de los datos experimentales. El problema consiste en obtener los valores de A y B que mejor representen un conjunto de N valores experimentales $\{x_i, y_i\}$, $i=1,2\ldots N$. El criterio que se sigue es obtener la recta que minimice la suma de los cuadrados de las distancias $d_i=y_i-(Ax_i+B)$.

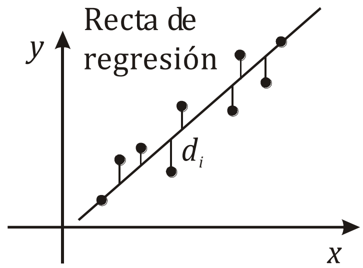


Fig 1. Se minimiza la suma de los cuadrados de las distancias d_i a la recta de regresión.

El resultado de dicho ajuste por mínimos cuadrados se puede expresar en función de los puntos $\{x_i, y_i\}$ como

$$A=\frac{N\left(\sum_i x_i y_i\right)-\left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_i y_i\right)}{N\left(\sum_i x_i^2\right)-\left(\sum_i x_i\right)^2}, \tag{8a}$$

$$B=\frac{\left(\sum_i y_i\right)\left(\sum_i x_i^2\right)-\left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_i x_i y_i\right)}{N\left(\sum_i x_i^2\right)-\left(\sum_i x_i\right)^2}. \tag{8b}$$

Muchos programas comerciales, permiten realizar estos ajustes directamente, y obtener los valores de A y B.

Para hallar los valores de los errores de A y B, se las evalúa como medidas indirectas que son función de las medidas directas $\{x_i, y_i\}$, que tienen unos errores $\{\delta x_i, \delta y_i\}$. Para simplificar las expresiones, consideramos que los errores δx_i son despreciables frente a los errores en la magnitud y. Entonces los errores δA y δB vienen dados por las relaciones siguientes:

$$\delta A=\sum_i\left|\frac{\partial A}{\partial y_i}\right|\delta y_i=\frac{\sum_i\left|Nx_i-\left(\sum_i x_i\right)\right|\delta y_i}{N\left(\sum_i x_i^2\right)-\left(\sum_i x_i\right)^2}\leq\frac{\sum_i N\left|x_i\right|\delta y_i+\left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_i \delta y_i\right)}{N\left(\sum_i x_i^2\right)-\left(\sum_i x_i\right)^2}, \tag{9a}$$

$$\delta B=\sum_i\left|\frac{\partial B}{\partial y_i}\right|\delta y_i=\frac{\sum_i\left|\left(\sum_i x_i^2\right)-\left(\sum_i x_i\right)x_i\right|\delta y_i}{N\left(\sum_i x_i^2\right)-\left(\sum_i x_i\right)^2}\leq\frac{\left(\sum_i x_i^2\right)\left(\sum_i \delta y_i\right)+\left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_i \left|x_i\right|\delta y_i\right)}{N\left(\sum_i x_i^2\right)-\left(\sum_i x_i\right)^2}, \tag{9b}$$

donde se usa la desigualdad $\left|A-B\right|\leq\left|A\right|+\left|B\right|$ para dar una cota superior al error.

© María del Mar Sánchez, Ignacio Moreno
http://tecnopto.edu.umh.es

El ajuste mediante una recta de regresión no es solamente válido para el caso de un experimento que sigue una ley lineal. Se pueden ajustar a una recta otros comportamientos sin más que hacer una transformación de los datos. Algunos ejemplos son:

- Ajuste de $y=(ax+b)^{-1}$: Se representa $y^{-1}=ax+b$. Definiendo $\tilde{x}_i=x_i$ e $\tilde{y}_i=y_i^{-1}$ se puede hacer un ajuste a una recta $\tilde{y}=A\tilde{x}+B$, y los parámetros obtenidos se relacionan con los de la ley original según $A=a$ y $B=b$.
- Ajuste de $y=b\exp(ax)$: se representa $\ln y=\ln b+ax$. Definiendo $\tilde{x}_i=x_i$ e $\tilde{y}_i=\ln y_i$ se puede hacer un ajuste a una recta $\tilde{y}=A\tilde{x}+B$, y los parámetros obtenidos se relacionan con los de la ley original según $A=a$ y $B=\ln b$.
- Ajuste de $y=ba^x$: se representa $\ln y=\ln b+x\ln a$. Definiendo $\tilde{x}_i=x_i$ e $\tilde{y}_i=\ln y_i$ se puede hacer un ajuste a una recta $\tilde{y}=A\tilde{x}+B$, y los parámetros obtenidos se relacionan con los de la ley original según $A=\ln a$ y $B=\ln b$.

6.3. Correlación

Si nos fijamos en los tres conjuntos de datos que se representan en la Fig. 2, se observa que en el primero de ellos los datos se esparcen en forma de nube, sin una relación entre ellos. En el segundo, la variable *y* tiene una tendencia a aumentar a medida que *x* aumenta. Finalmente, el tercero presenta una dependencia lineal muy acusada.

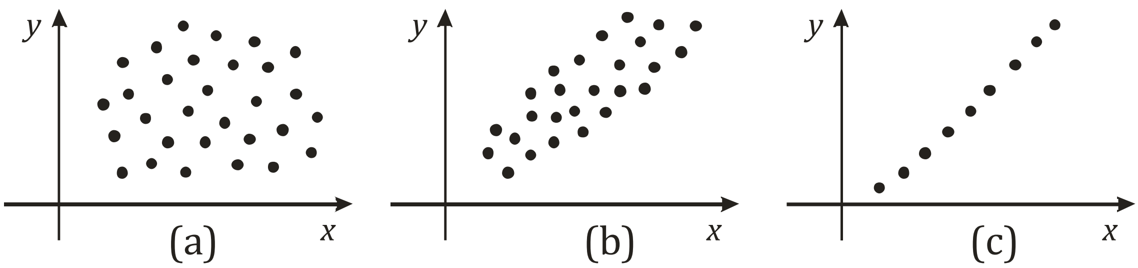


Fig. 2. Distribución de datos (a) sin correlación, (b) con dependencia estadística y (c) con dependencia funcional (correlacionados).

Se dice entonces que los datos *x* e *y* de la primera gráfica no están **correlacionados**, o que son independientes. En el segundo caso se dice que los datos presentan una **dependencia estadística**, mientras que en el tercer caso presentan una **dependencia funcional**.

Para evaluar numéricamente estas tendencias se define un **coeficiente de correlación** *r* que puede tomar valores entre –1 y +1. Si el valor de |*r*| es igual o similar a 1 entonces existe una dependencia funcional; si es igual o cercano a cero, entonces las variables son independientes. El coeficiente de correlación viene dado por la expresión.

$$r=\frac{N\left(\sum_i x_i y_i\right)-\left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_i y_i\right)}{\sqrt{\left(N\sum_i x_i^2-\left(\sum_i x_i\right)^2\right)\left(N\sum_i y_i^2-\left(\sum_i y_i\right)^2\right)}}. \qquad (10)$$

7. Decibelios

En el mundo de las telecomunicaciones con frecuencia se trabaja con señales que sufren cambios de varios órdenes de magnitud. Si consideramos un sistema físico donde se introduce una señal codificada mediante una magnitud física, se suele indicar la diferencia entre la potencia de entrada P_{in} y la potencia de salida P_{out} como un coeficiente dado por la siguiente relación:

$$\alpha = 10\log\left(\frac{P_{\mathrm{out}}}{P_{\mathrm{in}}}\right). \tag{11}$$

El coeficiente ⍰ es adimensional, pero se expresa en **decibelios (dB)**, para indicar que es una medida logarítmica. Se cumplen las siguientes propiedades:

- Si P_{in}=P_{out} se obtiene que α=0 dB.
- Si P_{in}>P_{out} el sistema físico induce **pérdidas** en la señal, y se obtiene que el valor de α es **negativo**.
- Si P_{in}<P_{out} el sistema físico produce una **amplificación** de la señal y α es un valor **positivo**.
- Al ser una cantidad logarítmica, α permite expresar variaciones grandes con números cómodos. Así, por ejemplo, si $P_{\mathrm{out}}=0{,}1P_{\mathrm{in}}$, el sistema induce unas pérdidas de –10 dB, mientras que si $P_{\mathrm{out}}=0{,}001P_{\mathrm{in}}$, las pérdidas son de –30 dB.
- Un valor especialmente útil al caracterizar sistemas de comunicaciones es aquel que reduce la potencia a la mitad, es decir $P_{\mathrm{out}}=0{,}5P_{\mathrm{in}}$, para el cual se obtienen pérdidas de –3 dB.

Con frecuencia en lugar de medir directamente la potencia se mide otra magnitud física (A) que tiene una relación cuadrática con la potencia, $P=cA^2$ siendo c un valor constante. Por ejemplo, la potencia eléctrica es proporcional al cuadrado de la tensión V, o la potencia luminosa es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda. En estos casos el coeficiente α se obtiene a como

$$\alpha = 20\log\left(\frac{A_{\mathrm{out}}}{A_{\mathrm{in}}}\right). \tag{12}$$

En comunicaciones ópticas se suelen utilizar también otras dos unidades relacionadas, los **dBm** y los **dBμ**. Son medidas en dB, pero referidas a una potencia de entrada P_{in}=1 mW y P_{in}=1 ⍰W respectivamente. Así por ejemplo cuando se dice que un emisor tiene una potencia de 0 dBm, se quiere decir que emite con una potencia de 1 mW.

El uso de logaritmos y decibelios es especialmente útil cuando hay magnitudes con una gran variación. Como ejemplo consideramos la siguiente secuencia arbitraria de valores:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0,00001	0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000	10.000	100.000
$z=\log(y)$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Tabla 2. Serie arbitraria de datos.

La Fig. 3 muestra la representación gráfica de $y(x)$ y $z(x)$, siendo $z=\log(y)$. La curva $y(x)$ no muestra variación en el rango de x entre 0 y 8, cuando en realidad los datos varían en 8 órdenes de magnitud. Esta variación sí se aprecia en la figura 3(b) al representar $z(x)$. Esto es equivalente a representar $y(x)$ utilizando una escala logarítmica en el eje y, tal y como muestra la figura 3(c).

© María del Mar Sánchez, Ignacio Moreno
http://tecnopto.edu.umh.es

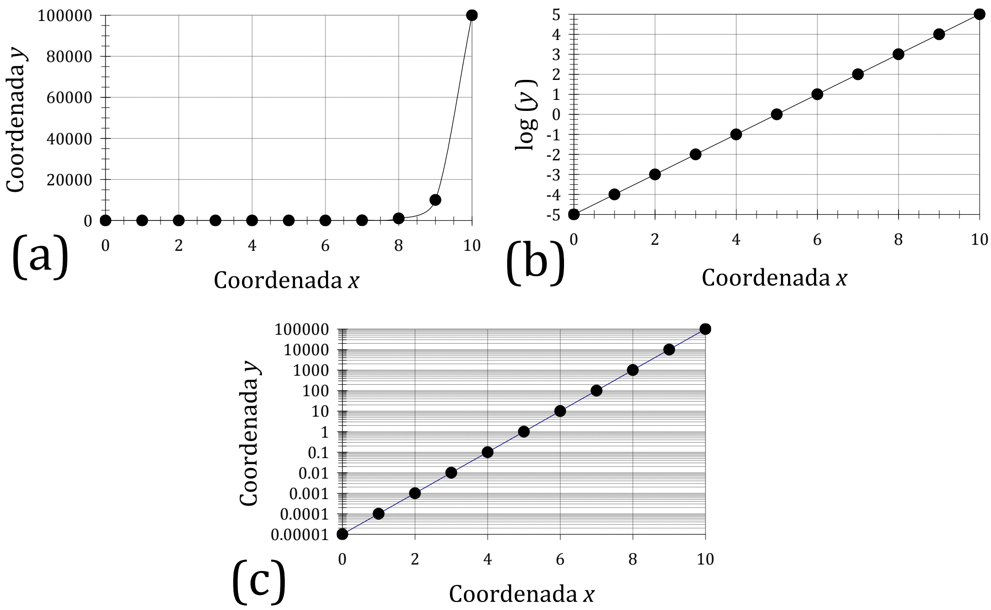


Fig. 3. Representación gráfica de los datos de la tabla: (a) Curva $y(x)$, (b) curva $z(x)$ donde z=log(y), (c) curva $y(x)$ empleando escala logarítmica en el eje y.

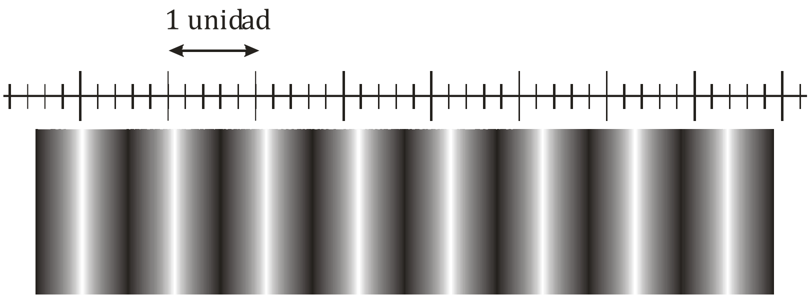
Ejercicios

1. Una onda sonora tiene una pérdida de 30 dB al pasar del aire al agua. Si la potencia de una onda sonora incidente en una superficie de separación aire/agua es 10 *mW*, ¿con qué potencia se transmite la onda sonora en el interior del agua?
2. Con un péndulo simple se quiere calcular el valor de la aceleración de la gravedad, g. Las medidas de la longitud del péndulo: 63,7; 63,6 y 63,8 *cm* se obtienen con una cinta métrica que aprecia milímetros. El período se calcula por medio del tiempo empleado por el péndulo en realizar 20 oscilaciones. Utilizando un cronómetro que aprecia décimas de segundo, se obtienen los valores: 32,2; 31,6 y 32,1 *s*. Calcular el valor de g con su error.
3. En muchos desarrollos teóricos y prácticos se utiliza la *aproximación de ángulos pequeños*, que consiste en sustituir el seno de un ángulo por el valor de este ángulo. ¿Qué error absoluto y relativo se comete cuando se toma el ángulo θ en lugar de $\sin(\theta)$?
4. Una pelota lanzada horizontalmente desde una altura h y con velocidad v recorre una distancia total d. Mediante análisis dimensional deducir la dependencia de d con h, v y g.
5. La tabla siguiente muestra los resultados experimentales de las medidas del período T del movimiento de un objeto suspendido de un muelle en función de su masa m. Estos datos son consistentes con una ecuación del tipo $T=Cm^a$, donde C y a son dos constantes. (a) Representar gráficamente $\log(T)$ en función de $\log(m)$ y obtener los parámetros de la recta de regresión. (b) A partir de estos parámetros obtener los valores de C y a.

Masa *m* (*kg*)	0,10	0,20	0,40	0,50	0,75	1,00	1,50
Período *T* (*s*)	0,56	0,83	1,05	1,28	1,55	1,75	2,22

© María del Mar Sánchez, Ignacio Moreno
http://tecnopto.edu.umh.es

6. Se realiza un experimento de interferencias de Young y se obtienen las franjas que se muestran en la figura. Determinar, con la mayor precisión posible, la distancia *i* entre franjas expresada (suponer que la unidad de la figura equivale a 2 *cm*). Sabiendo que la longitud de onda es λ=600 *nm* y que la distancia de observación es de L=1,2 *m*, utilizar la relación $i = \lambda L / 2a$ para calcular la separación $2a$ que hay entre las dos aberturas.



7. Demostrad que las ecuaciones (8a) y (8b) proporciona la recta de regresión que minimiza la suma de los cuadrados de las distancias d_i.

Bibliografía

1. M. Alonso y E. J. Finn, *<u>Física</u>*, Cap. 2, *Mediciones y unidades*, Addison-Wesley (1995).
2. P. A. Tipler, *<u>Física</u>*, Cap. 1, *Sistemas de medida*, 3ª edición, Ed. Reverté (1992).
3. C. Sánchez del Río, *<u>Análisis de Errores</u>*, Ed. Eudema (1989).

© María del Mar Sánchez, Ignacio Moreno
http://tecnopto.edu.umh.es